Insiemi convessi e funzioni convesse

Insiemi convessi

Definizione 1 (Insieme convesso). *Diciamo che un insieme $C \subset \mathbb{R}^d$ è* **convesso** *se*

$$tx + (1-t)y \in C \ \text{ per ogni } \ t \in [0,1] \ \text{ e per ogni coppia di punti } \ x, y \in \mathbb{R}^d\,.$$

Osservazione 2. *Ogni insieme convesso è connesso per archi.*

Esercizio 3. *Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ed ogni $r > 0$, la palla $B_r(x_0)$ è convessa.*

Esercizio 4. *Siano C_1 e C_2 due insiemi convessi in $\mathbb{R}^d$. Verificare che l'intersezione $C_1 \cap C_2$ è un convesso.*

Esercizio 5. *Sia C un insiemi convesso in $\mathbb{R}^d$. Dimostrare che la parte interna e la chiusura di C sono convessi.*

Funzioni convesse

Definizione 6 (Funzione convessa). *Diciamo che una funzione $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è* **convessa***, se*

$$F\big(tx + (1-t)y\big) \le tF(x) + (1-t)F(y)$$

$$\text{per ogni } \ t \in [0,1] \ \text{ e per ogni coppia di punti } \ x, y \in \mathbb{R}^d\,.$$

Più in generale, se $C \subset \mathbb{R}^d$ è un convesso, allora diciamo che una funzione $F : C \to \mathbb{R}$ è convessa se

$$F\big(tx + (1-t)y\big) \le tF(x) + (1-t)F(y)$$

$$\text{per ogni } \ t \in [0,1] \ \text{ e per ogni coppia di punti } \ x, y \in C\,.$$

Esercizio 7. *Dimostrare che la funzione*

$$\delta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \qquad \delta(x) := |x|,$$

è convessa.

Esercizio 8. *Dimostrare che se l'insieme C è convesso e chiuso, allora la funzione distanza*

$$\delta_C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \qquad \delta_C(x) := \min\{|x-y| \,:\, y \in C\},$$

è convessa.

Esercizio 9. *Siano $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ due funzioni convesse.*

(a) Dimostrare che la somma $F + G$ è una funzione convessa.

(b) *Dimostrare che la funzione* $F \vee G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, *definita per ogni* $x \in \mathbb{R}^d$ *come*

$$(F \vee G)(x) = \max\{F(x), G(x)\},$$

è convessa.

(c) *È vero che il prodotto di due funzioni convesse è una funzione convessa ?*

(d) *È vero che il prodotto di due funzioni convesse e positive è una funzione convessa ?*

Esercizio 10. *Sia* $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *una funzione convessa. Dimostrare che, per ogni* $c \in \mathbb{R}$, *l'insieme*

$$\{F < c\} := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ F(x) < c\}$$

è convesso.

Esercizio 11. *Sia* $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *una funzione convessa che ammette un minimo su* $\mathbb{R}^d$*:*

$$M = \min_{x \in \mathbb{R}^d} F(x).$$

Dimostrare che l'insieme

$$\{F = M\} := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ F(x) = M\}$$

è convesso.

Funzioni convesse in dimensione 1

Esercizio 12. *Sia* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione convessa. Dimostrare che se*

$$F(0) \leq F(1),$$

allora F *è monotona crescente su* $[1, +\infty)$.

Osservazione 13. *Sia* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione convessa. Se esistono due numeri reali* $a < b$ *tali che* $F(a) \leq F(b)$, *allora* F *è monotona crescente su* $[b, +\infty)$.

Proposizione 14. *Sia* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione convessa. Allora esiste il limite*

$$\lim_{x \to +\infty} F(x).$$

Esercizio 15. *Sia* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione convessa. Quale delle affermazioni seguenti è corretta?*

(i) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ha un minimo assoluto.*

(ii) *Se* F *e positiva, allora* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ha un minimo assoluto.*

(iii) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

(iv) *Non è possibile che* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$.

(v) *Se* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$ *, allora* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

(vi) *Se* $\lim_{x \to -\infty} F(x) \neq +\infty$ *e* $\lim_{x \to +\infty} F(x) \neq +\infty$, *allora* F *è costante.*

Esercizio 16. *Se la funzione* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convessa e limitata, allora è costante.*

Funzioni convesse in dimensione 2

Esercizio 17. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dimostrare che la funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) = f(x)$$

è convessa.

Esercizio 18. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dimostrare che per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la funzione*

$$f_{a,b}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(t) = F(ta, tb)$$

è convessa.

Esercizio 19. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dimostrare che se*

$$\lim_{x \to +\infty} F(x,0) = -\infty \qquad e \qquad \lim_{y \to +\infty} F(0,y) \quad \text{è finito},$$

allora

$$\lim_{t \to +\infty} F(t,t) = -\infty.$$

Esercizio 20. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dimostrare che se*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x,0) = -\infty \qquad e \qquad \lim_{y \to -\infty} F(0,y) = -\infty,$$

allora

$$\lim_{t \to +\infty} F(t,t) = +\infty.$$

Esercizio 21. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dimostrare che se i limiti*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x,0) \qquad e \qquad \lim_{y \to -\infty} F(0,y)$$

sono finiti, allora

$$\lim_{t \to +\infty} F(t,t) = +\infty.$$

Esercizio 22. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e tale che*

$$F(1,1) = F(-1,1) = F(1,-1) = F(-1,-1) = 0.$$

Dimostrare che $F \geq 0$ in

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \geq 1 \ e \ |y| \geq 1\}.$$

Continuità delle funzioni convesse

Lemma 23. *Siano $M > 0$ e $r > 0$ due costanti e $F : [-r, r] \to \mathbb{R}$ una funzione convessa tale che*

$$F(0) = 0\,, \quad F(r) \leq M\,, \quad F(-r) \leq M\,.$$

Dimostrare che

$$-\frac{M}{r}\,t \leq F(t) \leq \frac{M}{r}\,t \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in [-r, r].$$

Teorema 24. *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora F è continua.*